

ЧИСЛЕНА СИМУЛАЦИЯ НА ДВУМЕРНО ВЪНШНО ТЕЧЕНИЕ НА СВИВАЕМ ГАЗ

Константин Методиев, Зоя Хубенова

Институт за космически изследвания – Българска академия на науките
e-mail: komet@space.bas.bg

Ключови думи: Изчислителна флуидна динамика, метод на крайните обеми

Резюме: В настоящия доклад е представен алгоритъм за числено определяне на параметрите на външно течение на свиваем газ. Решена е система частни диференциални уравнения на Ойлер, състояща се от уравнението за непрекъснатостта на течението, уравнения за съхранение на количеството на движение и уравнение за съхранение на енергията. Полето на течението е дискретизирано посредством синтез на квадратична изчислителна мрежа, която от своя страна се състои от фамилия криви, удовлетворяващи елиптичните частни диференциални уравнения на Лаплас. Численият алгоритъм на решение е приложен към интегралната форма на уравненията за движение на газа. Използван е т. нар. клетъчно центриран “Метод на крайните обеми” за дискретизация на конвективния интеграл, като така получената числена флуидна е коригирана с дисипативна прибавка. Последната е определена с помощта на метода на проф. Филип Роу като точно решение на приблизителната задача на Риман спрямо всяка клетъчна стена на изчислителната мрежа. Времетопроизводната е изчислена с помощта на шест стъпкова схема на Рунге – Кута. Граничните условия на задачата обезпечават непроницаемост на обтекаемата повърхност. Проведени са експерименти с числената реализация за симулация на течение около сфера. Получените резултати за разпределението на плътността, статичното налягане и скоростта на флуида в полето на течението за различни числа на Мах и Рейнолдс са сверени с експериментални данни.

Въведение

Развитието на изчислителната техника през последните двадесет години даде възможност да се формира ново направление в дисциплината „Механика на флуидите” – т. нар. „Изчислителна флуидна динамика” (Computational Fluid Dynamics – CFD). Това позволи на изследователите да симулират различни ефекти и явления, възникващи в полето на течението, които до този момент не се поддаваха на математическа обработка със средствата на векторния анализ. Като пример могат да се посочат граничен слой, откъсване на течението от обтекаемата стена, турбулизация и др. Основният подход на работа се свежда до числено решение на система частни диференциални уравнения, описващи поведението на флуида при различни условия на средата. Главното предимство на този подход е получаването на споменатите физични явления в качеството им на част от резултата. Това означава, че тези явления вече могат да бъдат предвиждани, което до известна степен отменя провеждането на ред скъпо струващи експерименти.

В настоящия доклад е изложен алгоритъм за числено решение на система уравнения, описваща двумерно течение на свиваем газ с отчитане разпространението на акустични смущения – т. нар. система уравнения на Ойлер. Алгоритъмът се ползва с популярност в англоезичната литература благодарение на относителната простота на реализация. Поради значителния обем на материала, доказателства на твърденията не са посочени. Вместо това са дадени препратки към съответната литература. Освен това, поради абстракцията на теорията, авторите препоръчват литературата като цяло за подробно изясняване на основните моменти от числения алгоритъм.

Теоретични основи

В настоящата точка е описан алгоритъма за решение на поставената задача, в последователността на неговата работа.

Уравнения, описващи двумерно течение на свиваем газ.

Системата уравнения, описващи двумерното движение на газа, се състои от уравнение за непрекъснатостта на течението, уравнения за съхранение на количеството на движение и уравнение за съхранение на енергията (система на Ойлер):

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{q} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(\bar{q}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q}) = 0, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(\bar{q}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}.$$

Тази система е неопределена и затова статичното налягане се изразява като функция на останалите променливи, посредством уравнението за равновесно състояние на идеален газ на Клапейрон:

$$(2) \quad p = \rho(c_p - c_v)T = \rho(\kappa - 1)[e - 0.5(u^2 + v^2)].$$

Дискретизация на системата уравнения.

В процеса на численото пресмятане на системата уравнения се открояват два специфични етапа: дискретизация на геометричните производни и дискретизация на производната по време. За реализацията на първия етап се разглежда интегралната форма на уравненията за движение. Удобно е, отначало геометричните производни да се пренапишат в контравариантен базис:

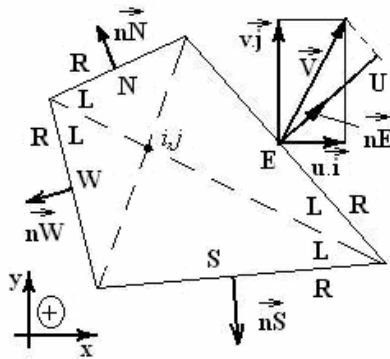
$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{q} + \bar{\nabla} \bar{R} = 0, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \rho(u\bar{i} + v\bar{j}) \\ \rho u(u\bar{i} + v\bar{j}) + p\bar{i} \\ \rho v(u\bar{i} + v\bar{j}) + p\bar{j} \\ \rho H(u\bar{i} + v\bar{j}) \end{pmatrix}.$$

След прилагане на теоремата на Гаус – Остроградски

$$(4) \quad \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{R} dV = \oint_S \bar{R} \cdot d\bar{S},$$

споменатата интегрална форма на уравненията за движение приема вида:

$$(5) \quad V \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \oint_S \bar{R} d\bar{S} = 0, \quad \bar{Q} = \frac{1}{V} \int_V \bar{q} dV.$$



Фиг. 1. Възприети означения в контролния обем

Последната система се дискретизира за контролния обем, показан на фиг. 1, както следва:

$$(6) \quad V \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + (\bar{R}_E \bar{S}_E + \bar{R}_W \bar{S}_W + \bar{R}_N \bar{S}_N + \bar{R}_S \bar{S}_S) = 0.$$

Неизвестната величина \bar{q} се търси за геометричния център на обема (клетката) – точка (i, j) , фиг. 1. От тук следва и името на метода за числено пресмятане: „Клетъчно центриран метод на крайните обеми“. При пресмятането на числената флуksия в система (6), важно е да се обърне внимание на посоката на единичните нормални вектори за всяка клетъчна стена – те винаги са ориентирани в посока „навън“ от обема.

При спазването на това условие, знаците пред събираемите $\bar{R}_W \bar{S}_W$ и $\bar{R}_S \bar{S}_S$ остават „+“.

В своята статия [1] Лах показва, че схемата за пресмятане на числената флуksия

$$(7) \quad \bar{R}_E = 0.5[\bar{R}(\bar{q}_{i,j}) + \bar{R}(\bar{q}_{i+1,j})]$$

е нестабилна, водейки до разходящо осцилиращо числено решение. Това налага въвеждането на дисипативна прибавка, която да подтисне нефизическите осцилации и да осигури сходимост на резултата към физически реални стойности. Например, дисипативната прибавка трябва да отчита физическата природа на уравненията на Ойлер. Придобилата популярност идея на Годунов [2] е да се намери характеристичното решение на едномерна система частни диференциални уравнения (ЧДУ) на Ойлер относно всяка клетъчна стена по направление на нормалния вектор. Решението на тази задача позволява да се отчита влиянието на акустични смущения в полето на течението. Тя се нарича „задача на Риман“. С цел да се намали изчислителната цена, допуска се да се реши приблизителната задача точно след нейната

линеаризация (т. нар. „Approximate Riemann Solver“). Процесът на линеаризиране допуска, че характеристичното решение се състои или от три разширителни (All Rarefaction Solution, Osher [3]) или от три ударни (All Shock Solution, Roe [4]) акустични вълни, като последният метод е използван в настоящата разработка. Извеждането на дисипативната прибавка е разгледано в достъпна форма в учебника на Воронич [5]. Окончателно за числената флуksия се получава

$$(8) \quad \bar{R}_E = 0.5(\bar{R}_{E,R} + \bar{R}_{E,L}) - 0.5 \sum_{k=1}^m \Delta \tilde{\alpha}_k |\tilde{\lambda}_k| \tilde{r}_k,$$

където знакът „ \sim ” означава осреднена по Roe величина и се пресмята с помощта на формулите:

$$(9) \quad \tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}; \tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}; \tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}; \tilde{h} = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

Матрицата от десни собствени вектори има вида

$$(10) \quad T_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ u - cn_x & u & u + cn_x & n_y \\ v - cn_x & v & v + cn_x & -n_x \\ h - cU & 0.5(u^2 + v^2) & h + cU & un_y - vn_x \end{pmatrix},$$

а векторът на характеристичния прираст е:

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta \alpha_1 &= \Delta \rho - a; \Delta \alpha_2 = \tilde{U} \Delta \rho - [-n_y \Delta(\rho u) + n_x \Delta(\rho v)]; \Delta \alpha_3 = \frac{a-b}{2}; \Delta \alpha_4 = \frac{a+b}{2}; \\ \Delta \tilde{\alpha} &= \|\Delta \alpha_1 \quad \Delta \alpha_2 \quad \Delta \alpha_3 \quad \Delta \alpha_4\|^T; \tilde{V} = n_x \tilde{u} + n_y \tilde{v}; \tilde{U} = -n_y \tilde{u} + n_x \tilde{v}; \\ a &= \frac{\kappa - 1}{2\tilde{c}^2} \{2\Delta(\rho e) - \tilde{u} [2\Delta(\rho u) - \tilde{u} \Delta \rho] - \tilde{v} [2\Delta(\rho v) - \tilde{v} \Delta \rho]\}; \\ b &= \frac{n_x \Delta(\rho u) + n_y \Delta(\rho v) - \tilde{V} \Delta \rho}{\tilde{c}}; \tilde{c} = \sqrt{(\kappa - 1) \left(\tilde{h} - \frac{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2}{2} \right)} \end{aligned}$$

Единственият недостатък на метода на Roe е представянето на разширителните вълни чрез разрыв. В случай, че характеристичната скорост е приблизително нула, приносът на разширителната вълна към прираста на флуks – вектора се изкривява. Ако стената на клетката попадне във веера на разширителната вълна, то последната се заменя с една характеристика и това води до възникването на скокове на разширение в полето на течението, което явление физически е невъзможно. По тази причина в учебника на Blazek [6] е предложен следният метод за корекция на собствените стойности, близки до нула (вж. също статията на Harten [7]):

$$(12) \quad \tilde{\lambda} = \text{diag} \left((\tilde{U} - \tilde{c})^* \quad \tilde{U} \quad \tilde{U} \quad (\tilde{U} + \tilde{c})^* \right) |\tilde{\lambda}|^* = \begin{cases} |\tilde{\lambda}|, |\tilde{\lambda}| \geq \delta \\ \frac{\tilde{\lambda}^2 + \delta^2}{2\delta}, |\tilde{\lambda}| \leq \delta \end{cases} \quad \delta = 0.1.$$

За пресмятане на физическите и дисипативни флуksии се използва т. нар. „Roe's Superbee Limiter”, с помощта на който се пресмята вектора на състоянието от ляво и дясно на клетъчната стена. Съгласно посоченото от Roe в статия [8], тази техника действа като интерполант и подтиска нефизически осцилации на численото решение в близост до фронта на ударни вълни. Така например векторът на състоянието за стена „Изток – Е” ($i+1/2$, фиг. 1) се пресмята съгласно формулите:

$$(13) \quad \begin{aligned} \bar{q}_L &= \bar{q}_i + \frac{1}{3} \phi_{i+1/2}^- (\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i) + \frac{1}{6} \phi_{i-1/2}^+ (\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}), \bar{q}_R = \bar{q}_{i+1} - \frac{1}{6} \phi_{i+3/2}^- (\bar{q}_{i+2} - \bar{q}_{i+1}) - \frac{1}{3} \phi_{i+1/2}^+ (\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i) \\ \phi_{i+1/2}^- &= \phi(r_{i+1/2}^-), \phi_{i-1/2}^+ = \phi(r_{i-1/2}^+), \phi_{i+3/2}^- = \phi(r_{i+3/2}^-), \phi_{i+1/2}^+ = \phi(r_{i+1/2}^+), \\ r_{i+1/2}^- &= \frac{\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}}{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}, r_{i-1/2}^+ = \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}{\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}}, r_{i+3/2}^- = \frac{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}{\bar{q}_{i+2} - \bar{q}_{i+1}}, r_{i+1/2}^+ = \frac{\bar{q}_{i+2} - \bar{q}_{i+1}}{\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_i}, \\ \phi(r) &= \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \end{aligned}$$

и получените резултати се използват за осредняването им съгласно формули (9).

Вторият етап от числената реализация е пресмятането на производната по време. В настоящия доклад е използвана шест стъпкова схема на Рунге – Кута:

$$q^{(0)} = q^{(n)},$$

$$(14) \quad q^{(1)} = q^{(0)} - \frac{0.037 \Delta t}{Vol_{i,j}} R(q^{(0)}), q^{(2)} = q^{(0)} - \frac{0.0851 \Delta t}{Vol_{i,j}} R(q^{(1)}), q^{(3)} = q^{(0)} - \frac{0.1521 \Delta t}{Vol_{i,j}} R(q^{(2)}),$$

$$q^{(4)} = q^{(0)} - \frac{0.2562 \Delta t}{Vol_{i,j}} R(q^{(3)}), q^{(5)} = q^{(0)} - \frac{0.4512 \Delta t}{Vol_{i,j}} R(q^{(4)}), q^{(n+1)} = q^{(0)} - \frac{\Delta t}{Vol_{i,j}} R(q^{(5)})$$

Стъпката на интегриране е адаптивна и се определя с оглед избягване на пресичането на характеристиките от две съседни клетъчни стени. Алгоритъмът не може да предвиди интерференцията и следователно не може да се гарантира постоянство на числените флуksии между две итеративни стъпки. Формулата за определяне на стъпката е следната:

$$(15) \quad \Delta t_{i,j} = \frac{CFL \cdot Vol_{i,j}}{0.5 \sum_s (|U| + c)_s S_{i,j}}; \Delta t = \min(\Delta t_{i,j}), i \in [1; \xi], j \in [1; \eta]$$

Гранични условия.

Друг важен етап от числената реализация е определяне на граничните условия на задачата. Те са разделени на две групи: по обтекаемата повърхност и по външната граница на изчислителната област. Относно първата група, необходимо е да се осигури непроницаемост на обтичаната стена, което означава, че трябва да се приравни на нула контравариантната скорост:

$$(16) \quad U = -n_y u + n_x v = 0$$

Това условие променя граничните стойности на обобщения флуks – вектор:

$$(17) \quad \vec{R}_b = \left\| 0 \quad p_b \vec{i} \quad p_b \vec{j} \quad 0 \right\|^T,$$

т. е. необходимо е само да се определи стойността на статичното налягане по обтекаемата стена. Това се извършва с помощта на формулата:

$$(18) \quad p_b = 0.125 (15 p_{i,0} - 10 p_{i,1} + 3 p_{i,2})$$

Във втората група се разглеждат граничните условия по външната граница на изчислителната област. Приета е концепцията за съществуване на ред фиктивни клетки от изчислителната мрежа, граничещ с външната граница. Стойностите на вектора на състоянието във фиктивните клетки е приравнен на тези от последния ред (периодични гранични условия). По този начин се пресмята „дясната“ стойност на флуks – вектора по граничните стени.

Синтез на изчислителна мрежа.

Преди извършването на численото решение на системата ЧДУ, описваща движението на газа, необходимо е да се дискретизира изчислителната област. Системата уравнения на Ойлер няма точно решение за произволни начални и гранични условия, но ако в полето на течението се синтезират много на брой квадратични клетки, като показаната на фиг. 1, то границите на всяка клетка може да се заменят с прави, числените флуksии по които могат да се пресметнат точно. Поради малката размерност на всяка клетка, натрупаната грешка при прилагането на този подход е незначителна.

Нека дължината на дъга s да варира от 0 до 1 и нека също така номерирането на точките по дъгата да се изменя от 0 до I така, че $s(0) = 0, s(I) = 1$. Присвоявайки първоначално стойности на първите производни

$$(19) \quad \frac{\partial s(0)}{\partial \xi} = \Delta s_1; \frac{\partial s(I)}{\partial \eta} = \Delta s_2,$$

извършват се полаганията

$$(20) \quad A = \sqrt{\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}}; \frac{1}{I \sqrt{\Delta s_1 \Delta s_2}} = \frac{sh \delta}{\delta},$$

и се изчисляват функциите в следната последователност:

$$(21) \quad u_1(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{th \left[\delta \left(\frac{\xi}{I} - \frac{1}{2} \right) \right]}{th \frac{\delta}{2}} \right\}; s(\eta) = \frac{u_1(\eta)}{A + (1 - A) u_1(\eta)}.$$

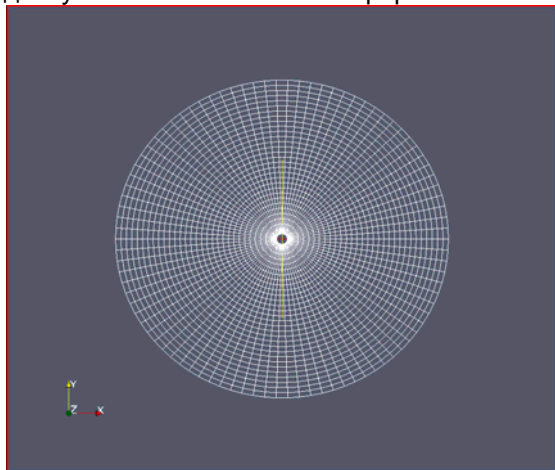
$$(22) \quad \vec{r}(\eta) = \vec{r}(0) + [\vec{r}(I) - \vec{r}(0)] \cdot s(\eta), \eta = 0, 1, 2, 3, \dots, I.$$

Уравнение (22) дава разпределението на точките по кривата, за която $\vec{r}(\eta) \in [\vec{r}(0); \vec{r}(I)]$ и към нея са приложени формули (21).

Резултати

На фиг. 2 е показана изчислителната мрежа, генерирана около сфера с радиус 1. Реализиран е споменатият ефект на изглаждане на Лапласиана, който може да се регулира посредством изменение стойностите на производните по формули (19).

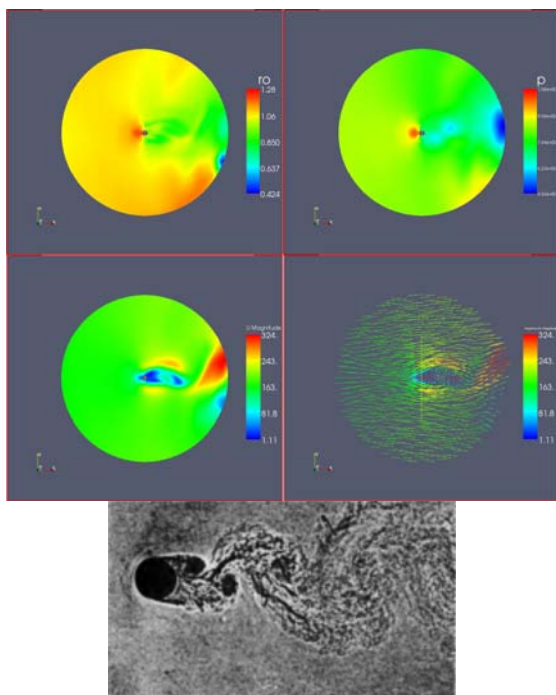
Първият експеримент, проведен с числената реализация, цели симулацията на дозвуково течение около сферата. Числото на Мах е 0.5, размерността на изчислителната мрежа е 91x31 точки по кривите респ. $\xi = const$ и $\eta = const$. Резултатите са сверени с експериментални данни на фиг. 3 и са представени в VTK файлов формат. Използваният визуализатор е ParaView®.



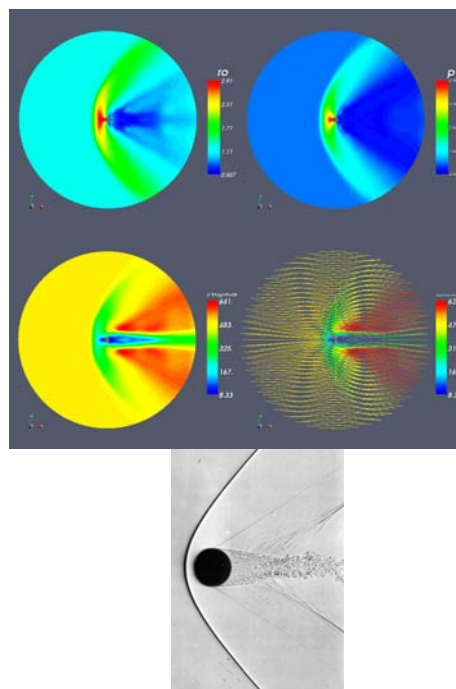
Фиг. 2. Структурна изчислителна мрежа

От фиг. 3 се вижда, че алгоритъмът успешно предвижда възникването на предна точка на заприщване (червената зона, карето горе, вдясно), а така също и на завихрянето на течението непосредствено след сферата (скоростното поле, долу вдясно). Последното явление се нарича вихрова пелена на Карман, която в последствие се разпада на турбулентен поток. Картината на разпределение на скоростното поле съвпада с тази на експерименталната продувка.

На следващата фиг. 4 е показан аналогичен експеримент, но този път числото на Мах е 1.5. Размерността на изчислителната мрежа остава същата. Ясно се откроява скокът на уплътнение пред сферата.



Фиг. 3. Разпределение на параметрите на течението, $M=0.5$



Фиг. 4. Разпределение на параметрите на течението, $M=1.5$

Заклучение

В настоящият доклад бе разгледан изчислителен алгоритъм за анализ на двумерно течение на свиваем газ. Решена бе числена система частни диференциални уравнения на Ойлер посредством т. нар. „Метод на крайните обеми“. За дисипация на численото решение бе използвана формулата на Phillip Roe, с помощта на която се решава приблизителната задача

на Риман точно относно всяка клетъчна стена на изчислителната мрежа. Последната бе генерирана посредством численото решение на система елиптически частни диференциални уравнения на Лаплас. Времепроизводната бе пресметната с помощта на шест стъпкова схема на Рунге – Кута. Използваните гранични условия на задачата обезпечават непроницаемост на обтекаемата стена, а така също и адекватен „контакт“ на изчислителната област с околната среда.

Естествено обобщение на поставената задача е численото решение на уравненията на Навие – Стокс. Разгледаният алгоритъм не може да предвиди ефекти, които са следствие на вискозността на флуида и по тази причина не могат да бъдат симулирани явления като откъсване от обтекаемата стена, граничен слой, турбулизация на течението и др. Въпреки това, решението на системата на Ойлер дава приемливи за инженерната практика резултати.

Литература:

1. L a x P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Community of Pure and Applied Mathematics, 7:159–93, 1954
2. G o d u n o v S. K. A Difference scheme for Numerical Computation Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations, Math. Sbornik (in Russian), 47 (1959), pp. 271–306; translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226, 1969
3. O s h e r S., F. S o l o m o n. Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservative Laws, Mathematics of Computation, 38:339, 1974
4. R o e P. L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, Journal of Computational Physics, 43:357–72, 1981
5. В о р о н и ч И. В. Сравнительный анализ группы численных методов газовой динамики, учебное пособие, Москва, 2007
6. B l a z e k J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, 2001
7. H a r t e n A., P. D. L a x, B. V a n L e e r. On Upstream Differencing and Godunov – Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, Soc. Industrial and Applied Mathematics Rev., 25, No 1, 1983
8. R o e P. L. “Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows”, Large – Scale Computations in Fluid Mechanics, Edited by Engquist, B. E., Osher, S., and Somerville, R. C. J., Vol. 22, Part 2, Lectures in Applied Mathematics, ASME, Providence, RI, pp. 163 – 193, 1985.